Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2020 год
5-6 класс

1. *Отличник Петя написал на доске верный пример A + B – C – D = E (где буквами A, B, C, D и E обозначены различные цифры), а хулиган Вася записал такой же пример, но все цифры у него оказались в обратном порядке: E + D – C – B = A. При этом у Васи все равно получилось верное равенство. Придумайте такой пример.*

Ответ: 5 + 6 – 0 – 3 = 8 (обязательно C = 0, остальные – какие угодно разные цифры, при которых выполняется равенство.

Решение. Если сложить два равенства, получим $A + E – 2C = A + E$, откуда $C = 0$. Остальные цифры можно взять произвольно с условием, что они разные и выполняется равенство.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Только доказано, что C = 0 – 3 балла. Только написано, что C = 0 – 1 балл. Неверный пример (совпадающие цифры, ошибка в счете) – 0 баллов.

2. *Мама дала Ане, Боре и Васе поровну денег. Аня на все свои деньги купила 5 леденцов, 15 ирисок и 1 шоколадку. Боря на все свои деньги купил 2 леденца, 6 ирисок и 4 шоколадки. Вася же все свои деньги потратил на шоколадки. Сколько шоколадок у него оказалось? Ответ надо обосновать.*

Ответ: 6 шоколадок.

Решение. 5Л + 15И + Ш = 2Л + 6И + 4Ш. Отсюда 3Л + 9И = 3Ш, то есть Ш = Л + 3И. Тогда 2Л + 6И = 2Ш, а 2Л + 6И + 4Ш = 2Ш + 4Ш = 6Ш.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов. Любое количество примеров, при которых получается 6 шоколадок, без доказательства, приравнивается к случаю «только ответ».

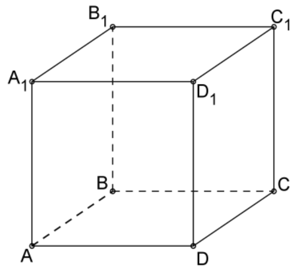
3. *По кругу записаны 14 натуральных чисел. Сумма любых четырёх чисел, стоящих подряд, равна 60. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 30.*

Решение. Обозначим одно из чисел буквой a. Тогда по кругу от неё на 5, 9, 13 местах тоже стоит a (чтобы при сдвиге на 1 число сумма оставалась 60). Продолжая движение по кругу, получаем, что на 3, 7, 11 местах также стоит число a. Таким образом, все места через одно заняты числом a. Аналогично, остальные числа равны. Обозначим их буквой b. Тогда $2a + 2b = 60$, откуда $a + b = 30$. Если бы одно из этих чисел было больше или равно 30, тогда второе было бы меньше либо равно 0, что противоречит условию (числа натуральные).

Критерии. Доказано, что все числа через три одинаковые – 1 балл. Доказано, что числа через одно. одинаковые – 2 балла. Доказано, что всего два чередующихся числа – 3 балла. Доказано, что сумма любых двух соседних равна 30 – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.

4. *Сколькими способами можно покрасить вершины куба в красный или синий цвета так, чтобы цвет каждой вершины совпадал с цветом большинства ее соседей? Способы считаются различными, если хотя бы одна вершина покрашена в другой цвет. Ответ надо обосновать.*

Ответ: 8 способов.



Решение. Если все вершины одноцветные – 2 способа (все синие или все красные). Пусть есть два цвета. Пусть вершина A – синяя. Если все её соседи синие, то есть A_1, B, D, то B_1 – тоже синяя (2 соседа), аналогично D_1 и C – тоже синие, тогда и C_1 – синяя. Противоречие. Значит, у вершины A только два синих соседа. Пусть это B и D. Тогда C – тоже синяя. A_1 – красная, значит, у неё хотя бы два красных соседа, то есть, B_1 и D_1 – красные. Тогда и C_1 – красная. Таким образом, все вершины в одной грани синие, а в противоположной – красные. Выбрать синюю грань можно 6-ю способами. Значит, всего, учитывая одноцветные случаи, 8 способов.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Доказано, что если есть два цвета, то в одной грани – все вершины синие, а в противоположной – все красные – 2 балла, этот факт без обоснования – 1 балл (за правильный ответ в этих случаях добавляется 1 балл). Если при полном объяснении двуцветного случая нет упоминания об одноцветном – отнимается 2 балла (то есть 5 баллов). Полное решение – 7 баллов.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2020 год
7-8 класс

1. *Два числа a и b таковы, что сумма двух обратных им чисел равна 1. Каждое из чисел a и b уменьшили на 1. Докажите, что одно из получившихся чисел обратно другому.*

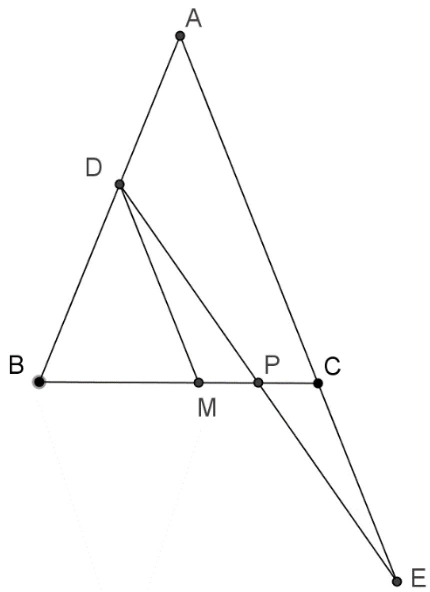
Решение. По условию $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. Тогда $a + b = ab$, то есть, $ab - a - b = 0$. Рассмотрим произведение получившихся после уменьшения на 1 чисел $(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1 = 0 + 1 = 1$. Значит, получившиеся числа взаимнообратны, $a-1=\frac{1}{b-1}$.
Критерии. Получено условие $a + b = ab$ – 1 балл. Получено условие $(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1$ – 1 балл. Получены оба условия – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

2. *В классе 10 шахматистов. Они сыграли несколько партий в шахматы (каждая пара сыграла не более одной партии). Может ли так быть, что один человек сыграл 9 партий, двое – по 8 партий, двое – по 5 партий, четверо – по 3 партии, один – 1 партию?*

Ответ: нет.
Решение. Пусть такое возможно. Каждый сыграл не более 9 партий. Значит, один (назовем его *A*) сыграл все партии, а один – только с ним. Значит, остальные сыграли не более 8 партий. Значит, двое из них (назовем их *B* и *C*) сыграли со всеми оставшимися и с *A*. Тогда сыгравшие по 3 партии играли только с *A*, *B* и *C*. Осталось рассмотреть тех, кто сыграл 5 партий. Они могли играть только с *A*, *B*, *C* и между собой – по 4 партии. Не получается по 5 партий. Противоречие.
Критерии. Только ответ «нет» – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

3. *Дан равнобедренный треугольник ABC (AB = AC). На стороне AB и на продолжении стороны AC за точку C отмечены точки D и E соответственно так, что BD = CE. Отрезки DE и BC пересекаются в точке P. Докажите, что PD = PE.*

Решение. В треугольнике *ABC* углы *B* и *C* равны. Проведём через точку *D* прямую, параллельную стороне *AC*. Точку пересечения обозначим *M*. $\angle DMB = \angle C$ (соответственные углы при пересечении параллельных прямых *DM* и *AC* прямой *BC*). Тогда $\angle DMB = \angle B$, треугольник *BDM* – равнобедренный, *DM* = *BD* = *CE*. Рассмотрим треугольники *DMP* и *ECP*. *DM* = *CE* (как уже доказано), $\angle MDP = \angle PEC$ (внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых *DM* и *AC* прямой *DE*), $\angle DMP = \angle ECP$ (внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых *DM* и *AC* прямой *BC*). Треугольники *DMP* и *ECP* равны по стороне и двум прилежащим углам. Тогда *PD* = *PE*.



Критерии. Полное решение – 7 баллов.

4. *На доске написано число 53. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается увеличить или уменьшить любую цифру на 1. Проигрывает тот, кто получит число, уже встречавшееся ранее на доске. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его соперник? (Девятку можно заменить только на восьмерку. Ноль – только на единицу. Заменять первую цифру на ноль нельзя).*

Ответ: Выигрывает первый игрок.
Решение. Записываем все числа на прямоугольной доске – одна строка – числа из одного десятка. Получаем таблицу 9×10. Ставим в клетку 53 фишку. Ходы возможны только в соседнюю по стороне клетку. Разбиваем доску на горизонтальные доминошки. Стратегия первого игрока – ходить во вторую клетку доминошки, в которой находится фишка (то есть первый ход – в клетку 52). Таким образом, второй игрок всегда делает ход в новую доминошку. У первого игрока всегда есть ответный ход. Так как игра конечна, с каждым ходом остается на одну незатронутую клетку меньше, то второй игрок проигрывает.
Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов. Если приведена верная стратегия, но не обосновано, что она приводит к победе – 3 балла. Если про стратегию не понятно, что она выигрышная – 0 баллов.