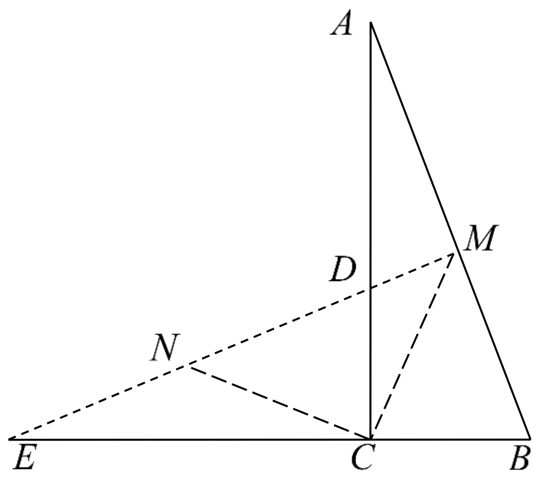
Матбой №2D

1. *Дан прямоугольный треугольник ABC, точка M – середина гипотенузы AB, точка D выбрана на катете AC так, что AD > DC, точка E – точка пересечения прямых MD и BC. Оказалось, что AB = ED. Докажите, что ∠ABC = 3∠BEM.*



Решение. Проведём отрезки CM и CN, где N – середина отрезка ED. Тогда по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равны отрезки $EN = ND = NC = ED/2 = AB/2 = CM = AM = MB$. Пусть $\angle BEM = \alpha$. Тогда $\alpha = \angle CED = \angle ECN$, тогда $\angle CNM = \angle CMN = 2\alpha$, как внешний угол ΔNEC. Тогда $\angle CBM = \angle MCB = 3\alpha$, как внешний угол ΔCME. Утверждение доказано.

2. *Докажите, что для всех положительных a выполняется неравенство* $a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq 16$.

Решение. По неравенству Коши получаем

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq 2a^{12}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq 2\left(a^{12}+\frac{1}{a^4}\right)+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq 4a^4+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}\geq$$
$$\geq 4\left(a^4+\tfrac{1}{a^2}\right)+\tfrac{8}{a}\geq 8a+\tfrac{8}{a}\geq 8\left(a+\tfrac{1}{a}\right)\geq 8\cdot 2=16.$$

3. *На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если A и B, а также B и C – друзья, то A и C – друзья; в) если A и B, а также B и C – враги, то A и C – друзья; г) если A и B друзья, а B и C – враги, то A и C – враги?*

Ответ: 2^{99}.

Решение. Все люди делятся на две (возможно, пустых) группы, внутри каждой из которых люди друзья, а пары людей из разных групп – враги. При этом любая такая конфигурация подходит. Берём первого человека. Тогда остальные либо входят в группу с ним, либо не входят. Способов так разделить людей на две группы – 2^{99}.
Доказано, что все люди делятся на две группы – *4 балла*.

4. *На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?*

Ответ: 11.

Решение. Число 10 пропадёт только после 11-го действия. Любое число, больше или равно 11, не более чем за 10 ходов (возможно, за 0 ходов) превратится в число, которое оканчивается на две одинаковые цифры: 00, 11, 22, 33, …, 99, а на следующий ход пропадёт (если не пропало раньше).

5. *Найдите все пары целых чисел a, b, для которых* $a^2 + b + 2 = a + b^2$.

Ответ: (1; 2); (0; – 1); (0; 2); (1; – 1).

Решение. Перенесем все кроме 2 в одну часть и разложим на множители: $(b - a)(a + b - 1) = 2$. Возможны 4 случая: 1) $b - a = 1$; $a + b - 1 = 2$; 2) $b - a = -1$; $a + b - 1 = -2$; 3) $b - a = 2$; $a + b - 1 = 1$; 4) $b - a = -2$; $a + b - 1 = -1$. В каждом из случаев система из двух линейных уравнений решается, и получается ответ: $(a; b)$ = (1; 2); (0; – 1); (0; 2); (1; – 1).
Задача сведена к конечному перебору — *6 баллов*.

6. *На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?*

Ответ: можно.

Решение. Рассмотрим лампу с номером 2021. Если она не включена, берем вместе с ней лампу 43, и меняем их состояние. А дальше рассмотрим для всех n от 1 до 2020 пары $2n$ и n, что позволяет включить все лампы от 1 до 2020.