7-8 класс

1. За круглым столом сидят 30 девочек. У Маши есть 2011 конфет, а у остальных девочек конфет нет. Любая девочка, имеющая хотя бы две конфеты, может дать по одной конфете двум следующим за ней по часовой стрелке девочкам или двум следующим за ней против часовой стрелки девочкам. Могут ли все конфеты собраться у другой девочки?

2. Жители города Натуральный живут в домах с номерами от 1 до 2011 (каждый житель – в своем доме с уникальным номером). Некоторые из них дружат между собой. В журнале "National Geographic" написали, что у двух жителей есть общий друг тогда и только тогда, когда номер дома одного из них делится на номер дома другого. Докажите, что журнал врёт.

3. Вася разрезал полоску, на которой было написано 44-значное число, и получил кусочки, на которых оказались написаны все целые числа от 2001 до 2011. Докажите, что исходное число не было простым.

4. Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a-2} = \frac{b+15}{b+5}$. Найдите наибольшее возможное значение $\frac{a}{b}$.

5. Числа a, b и c удовлетворяют условиям $a+b-c=2$ и $2ab-c^2=4$. Докажите, что $a=b=c$.

6. Медиана AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке F. Известно, что $BF=FD$. Докажите, что $\angle C > 30^\circ$.

7. Вася и Петя по очереди ставят крестики и нолики в клетки полоски $1 \times n$: Вася ставит своим ходом в одну из свободных клеток крестик, а Петя – нолик. Запрещается ставить два одинаковых знака в соседние клетки. Вася начинает, а проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Докажите, что $n \geqslant 200$ попарно различных чисел можно расставить по окружности таким образом, чтобы каждое число было либо больше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 50 чисел, следующих за ним по часовой стрелке.

9. Даны натуральные числа a и b ($b > a \geqslant 2$). Докажите, что, если числа $a+k$ и $b+k$ взаимно просты при всех натуральных k от 1 до $b-a$, то $b-a=1$.