

9-11 класс

1. Даны целые числа x_1, x_2, \dots, x_{10} такие, что

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{10}| - |x_1 + x_2 + \dots + x_{10}| = 2.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 1 или -1 .

2. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что в нем можно выбрать а) 25 б) 50 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

3. Натуральные числа p и q отличаются на 2. Докажите, что числа $p^4 + 4$ и $q^4 + 4$ не взаимно просты.

4. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ нашлась точка M такая, что треугольник ABM – равносторонний. Докажите, что на прямой AB есть точка N , для которой треугольник CDN – равносторонний.

5. В левом нижнем углу доски $2 \times n$ лежит 2^{n+1} конфет. Каждую минуту Вася находит две конфеты, лежащие в одной клетке, и перекладывает одну из них в соседнюю справа или сверху клетку, а другую конфету съедает. Докажите, что вне зависимости от порядка действий Василия рано или поздно хотя бы одна конфета окажется в правом верхнем углу.

6. Докажите, что $n \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \geq (n+1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$ при всех натуральных n .

7. Точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, CA, AB соответственно треугольника ABC таковы, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Описанная около $A_1B_1C_1$ окружность вторично пересекает стороны треугольника в точках A_2, B_2, C_2 . Докажите, что AA_2, BB_2, CC_2 тоже пересекаются в одной точке.

8. Для любого натурального n обозначим через a_n наибольший нечётный делитель числа n . Докажите неравенство $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{n^2+2}{3}$.

9. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет ровно один корень. Кроме того, уравнение $f(2x-3) + f(3x+1) = 0$ имеет ровно один корень. Найдите корень трёхчлена $f(x)$. (Приведите все варианты и докажите, что других нет.)

10. Даны натуральные числа n и k , где $n > k$. Докажите, что если одно из уравнений $x^n + y^n = z^k$ и $x^n + y^n = z^{n-k}$ имеет решение в натуральных числах, то и другое – тоже.