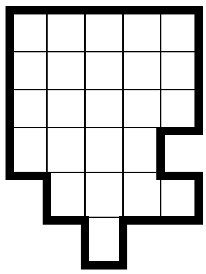
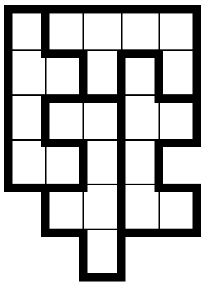
Личное первенство по математике «Математический фейерверк» 2018-2019 г.

5-6 классы

1. *Разрежьте фигуру на рисунке на четыре равные фигуры по линиям сетки.*



<u>Решение.</u> Разрезание на рисунке.



2. *В 15-литровые ведра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нем уже есть. Можно ли собрать всю воду в одном ведре? Ответ надо обосновать.*

<u>Ответ:</u> нет.

<u>Решение.</u> При каждом переливании в ведре оказывается количество воды, кратное 3. Допустим, что можно собрать всю воду в одном ведре. Тогда перед последним переливанием в двух ведрах 5 и 10 литров воды. Одно из этих значений мы получили при предпоследнем переливании, значит, оно должно быть кратно 3. Но ни 5, ни 10 на 3 не делятся. Противоречие.

3. *Вместо букв запишите цифры 1, 2, 3, 4, 5 таким образом, что образовалось правильное равенство: ОЛ × И = МП. Найдите все возможные ответы (разным буквам соответствуют разные цифры). Ответ надо обосновать.*

<u>Ответ:</u> $13 \times 4 = 52$.

<u>Решение.</u> И $\neq$ 1, потому что иначе первая цифра не меняется. Кроме того, Л $\neq$ 5 и П $\neq$ 5, поскольку тогда цифра 5 повторяется или должна быть еще цифра 0. И $\neq$ 5, так как П $\neq$ 5 и П $\neq$ 0.

Если О = 5, то при умножении на любое число И > 1 получим трёхзначное число. Значит, М = 5.

Переберём значения И.

Если И = 4, то О = 1 и П – чётная, то есть П = 2, поэтому остается проверить, выполняется ли равенство: $13 \times 4 = 52$, что дает первое решение.

Если И = 3, то О = 1 и остается проверить равенства $12 \times 3 = 54$ или $14 \times 3 = 52$, которые неверны.

Если И = 2, то О = 1, что невозможно, так как даже $14 \times 2 < 50$.

Таким образом найденное решение – единственно возможное.

4. *На шахматной доске стоят 10 шахматных фигур (слоны и ладьи), не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей может оказаться на доске? Ответ надо обосновать.*

<u>Ответ:</u> 6 ладей.

<u>Решение.</u> <u>Оценка</u>. Каждая ладья бьёт одну вертикаль и одну горизонталь. Поэтому 8 ладей, не бьющих друг друга, бьют всё поле. Если ладей 7, то остаётся только одна небитая клетка, что позволяет поставить не более одного слона. Поэтому ладей не больше 6.

<u>Пример</u> на рисунке.

С	С						
					Л		
							Л
		Л					
						Л	
				Л			
			Л				
С	С						

Личное первенство по математике «Математический фейерверк» 2018-2019 г.

7-8 классы

1. *Найдите все пары натуральных чисел a и b (a ≤ b), для которых НОД (a; b) = 2, НОК (a; b) = 60.*

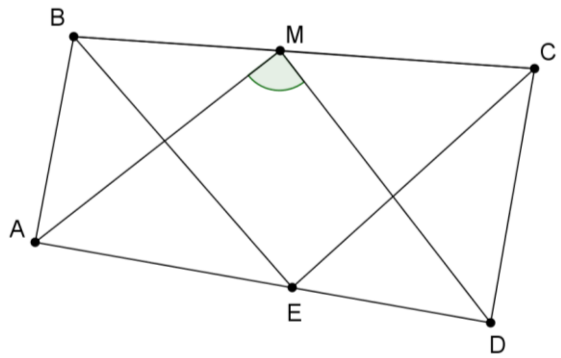
Ответ: 4 пары: (2; 60); (4; 15); (6; 20); (10; 12).

Решение. Пусть $a = 2x$, $b = 2y$, где числа x и y – взаимнопростые. Но тогда $60 = 2xy$, то есть надо найти все пары взаимнопростых чисел, произведение которых равно 30. Число 30 имеет 8 делителей, которые разбиваются на 4 пары: 1 и 30, 2 и 15, 3 и 10, 5 и 6. Тогда получаем пары чисел: 2 и 60, 4 и 30, 6 и 20, 10 и 12.

2. *По кругу расставили несколько натуральных чисел. Известно, что произведение любых двух соседних чисел является точным квадратом натурального числа. Докажите, что произведение любых двух из расставленных чисел также является точным квадратом натурального числа.*

Решение. Обозначим расставленные числа по часовой стрелке как a_1, a_2, ..., a_k. Тогда из условий задачи следует, что для произвольных $1 \le i \le j \le k$ произведение $(a_ia_{i+1})(a_{i+1}a_{i+2})\ldots(a_{j-1}a_j) = n^2$ является точным квадратом. Но тогда и произведение $a_ia_j = \frac{n^2}{a_{i+1}^2a_{i+2}^2\ldots a_{j-1}^2}$ является точным квадратом, что и требовалось доказать.

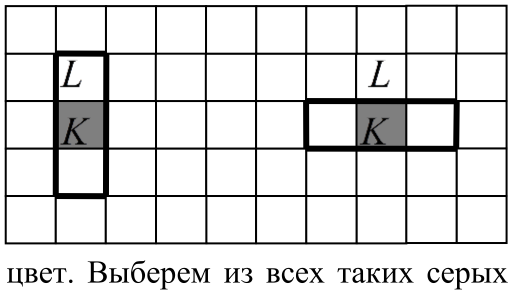
3. *Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника ABCD, причём B и C – вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и DM перпендикулярны. Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника ABCD пересекаются на стороне AD.*



Решение. Пусть BE – биссектриса угла B, точка E лежит на стороне AD. Соединим точки M и E. Так как треугольник ABM – равнобедренный, то BE содержит его высоту и медиану. Тогда AEM – равнобедренный. Пусть $MAE = \alpha$, тогда $AME = \alpha$, $EMD = 90° - \alpha$. Из треугольника AMD $MDA = 90° - \alpha$. Тогда треугольник MED – равнобедренный, $\Delta CEM = \Delta CED$, а значит, CE – биссектриса угла C.

4. *Квадрат 2019 × 2019 покрыт некоторым образом прямоугольниками 1 × 3. Средняя клетка 1 × 1 каждого такого прямоугольника окрашена в черный цвет. Можно ли, имея расположение только черных клеток, определить точное расположение всех прямоугольников 1 × 3?*

Ответ: Да.



Решение. От противного. Предположим, что существуют два различных замощения квадрата прямоугольниками 1 × 3, при которых чёрные клетки расположены одинаково. Тогда есть по крайней мере одна чёрная клетка, которая соответствует различным прямоугольникам – одному вертикальном, а другому – горизонтальному. Покрасим все эти клетки в серый цвет. Выберем из всех таких серых клеток такую, которая расположена выше других. Обозначим ее через K. Тогда клетка над

К, обозначим ее через *Л*, покрыта разными прямоугольниками для этих покрытий. Во втором случае существует чёрная клетка, которая является центром прямоугольника, который покрывает клетку *Л*. Поскольку расположение черных клеток одинаковое, то она будет чёрной при другом покрытии, но прямоугольники – разные. Поэтому она по определению должна быть серой и расположенной выше выбранной серой. Но мы выбрали самую верхнюю среди серых. Полученное противоречие завершает доказательство.

Математический экспресс 2018-2019 г.

5-6 классы

1 тур

Задача 1. Первоклассник Вася знает пока только нечётные цифры. Однажды его вызвали к доске и просили записать подряд числа от 1 до 111. Вася начал писать: 1, 3, 5, 7, 9, 11, … Двенадцатым он написал число 33. Сколько всего чисел запишет Вася?
Ответ: **31 число.**

Задача 2. Найдите разность между суммой четырёхзначных чисел, начинающихся на 2, и суммой четырёхзначных чисел, начинающихся на 1.
Ответ: **1 000 000.**

2 тур

Задача 3. На каждой из десяти карточек Алеша записал по одной цифре так, чтобы все цифры были различными. Выбрав несколько карточек, Кирилл составил из них два подряд идущих числа. Какие наибольшие числа он мог составить?
Ответ: **79 и 80.**

Задача 4. На выставке собак и кошек собрались вместе несколько хозяев и их питомцев. Умная собачка Соня сосчитала, что всего собралось вместе 6 голов и 20 ног и лап. Сколько среди собравшихся было кошек, если их было больше, чем собак?
Ответ: **3 кошки.**

3 тур

Задача 5. Посмотрев на календарь, Олег заметил: «16 дней назад было в 2 раза большее число, чем сегодня». А Катя добавила: «А через 16 дней будет в 5 раз меньшее, чем сегодня». Когда состоялся этот разговор? Назовите месяц и день.
Ответ: **15 февраля.**

Задача 6. Тузик и Бобик нашли грелку и стали её рвать. Тузик рвал каждый попавшийся ему кусок на 4 части, Бобик – на 6 частей. Тузик разорвал 20 кусков, Бобик – 19 кусков (целая грелка тоже считается одним куском). На сколько кусков в итоге была разорвана грелка?
Ответ: **156 кусков.**

4 тур

Задача 7. Прямоугольник, у которого одна из сторон втрое длиннее другой, разрезали на одинаковые квадратики. Оказалось, что сумма их периметров в 6 раз больше периметра исходного прямоугольника. Сколько могло получиться квадратиков?
Ответ: **48 квадратиков.**

Задача 8. Сколько существует двузначных чисел, у которых цифра десятков отличается от цифры единиц **более чем на 2**?
Ответ: **49 чисел.**

5 тур
Задача 9. В шеренгу выстроились 100 человек, каждый из которых – рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Первый сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 1», второй сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 2» и т.д., вплоть до сотого, который сказал: «Количество рыцарей среди нас – делитель числа 100». Сколько в шеренге рыцарей? Укажите все варианты.
Ответ: **10 или 0, принимать только оба ответа.**

Задача 10. Найдите все числа, у которого сумма всех цифр равна 6, произведение всех цифр равно 6, а само это число делится на 6.
Ответ: **312 или 132, принимать только оба ответа.**

6 тур
Задача 11. Дрессированный пёс Полкан бегает в два раза быстрее Рекса и в три раза быстрее Маши. На беговой дорожке стадиона Полкан, Рекс и Маша стартовали одновременно. Полкан добежал до финиша на 12 секунд раньше Рекса. А на сколько секунд Полкан прибежал раньше Маши?
Ответ: **На 24 секунды.**

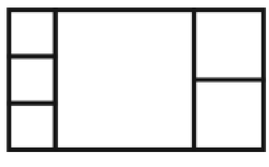
Задача 12. Петя разрезал квадрат тремя прямыми линиями на семь частей. У него оказалось три пятиугольника. Сколько углов у оставшихся четырёх фигур? Укажите все варианты.
Ответ: **12 или 13, принимать только оба ответа.**

Математический экспресс 2018-2019 г.

7-8 классы

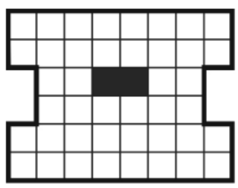
1 тур
Задача 1. Целые числа x и y таковы, что $2^{x+3} + 2^{x} = 3^{y+2} - 3^{y}$. Чему может равняться $x^2 + y^3$? Укажите все возможные ответы.
Ответ: **17.**

Задача 2. Найдите площадь прямоугольника, составленного из квадратов, если его периметр равен 34 см.
Ответ: **66 см^2.**

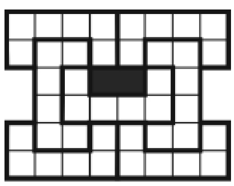


2 тур
Задача 3. Алина бежит из дома на работу с постоянной скоростью. Если бы она увеличила скорость на 2 м/с, то добежала бы до работы в 2,5 раза быстрее. Во сколько раз быстрее она добежала бы до работы, увеличив скорость на 4 м/с?
Ответ: **В 4 раза.**

Задача 4. Разрежьте фигуру на 7 равных частей по сторонам клеток.



Ответ:

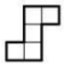


3 тур

Задача 5. Двое снегоуборщиков очищали город от снега. После того как первый проработал 3 часа, а второй – 7 часов, оказалось, что они выполнили 40% всей работы. Проработав совместно еще 5 часов, они осознали, что им осталось выполнить еще 6/35 всей работы. За сколько часов, работая отдельно, каждый из них мог бы очистить город?
Ответ: **20 часов и 28 часов.**

Задача 6. Найдите наименьшее простое число, сумма цифр которого является нечетным составным числом.
Ответ: **997.**

4 тур

Задача 7. Каким наименьшим количеством фигурок  можно покрыть квадрат 7×7? Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Фигурки не могут накладываться друг на друга, но могут выходить за рамки квадрата.
Ответ: **11.**

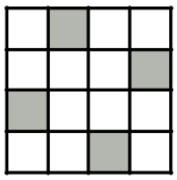
Задача 8. Грузовичок Лёва везёт 18 камней суммарным весом 250 кг. 17 из них весят одинаково, а один легче остальных, но на вид такой же, как все. На ухабах два камня выпало и Лёва довёз 16 камней суммарным весом 222 кг. Сколько весит лёгкий камень?
Ответ: **12 кг.**

5 тур

Задача 9. Имеется две кучи, в первой – 8 камней, во второй – 9 камней. Два игрока по очереди берут 1 или 2 камня (на свой выбор) из какой-нибудь кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Какой ход должен сделать первый игрок, чтобы в дальнейшем выиграть? Укажите все варианты.
Ответ: **(8; 8) и (6; 9).**

Задача 10. Найдите наименьшее натуральное число, в записи которого нет нулей, которое делится на 25, имеет сумму цифр 26 и произведение цифр которого делится на 27.
Ответ: **19925.**

6 тур



Задача 11. Сколько прямоугольников, содержащих хотя бы одну закрашенную клетку, изображено на рисунке? (стороны прямоугольников идут по линиям сетки).
Ответ: **71.**

Задача 12. Петя написал на доске 2019 дробей: $\frac{1}{2019}, \frac{2}{2019}, \frac{3}{2019}, \dots, \frac{2019}{2019}$. Сколько из этих дробей являются сократимыми?
Ответ: **675.**