УДК 51(077)
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано к печати
учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ

Под общей редакцией *З. А. Дулатовой*

М34 **Математика** и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XII Всерос. науч.-практ. конф., посвящ. 110-летию основания Педагогического института в г. Иркутске / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. – 255 с.
ISBN 978-5-9624-1688-5

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

УДК 51(077)
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-9624-1688-5

СОДЕРЖАНИЕ

В.Н. Агейчик

МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, г. Иркутск

А.Г. Зенцов

Лицей №36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ. НА ПОРОГЕ БОЛЬШОЙ МАТЕМАТИКИ

Введение

Понятие выпуклости возникло в античные времена. В XIX веке теория выпуклых фигур формировалась в трудах О. Коши, Я. Штейнера и Г. Минковского. В XX веке выпуклая геометрия встала в ряд с мощными инструментами теоретической и прикладной математики. Математическая экономика, теория управления, выпуклый анализ основываются на понятиях и методах теории выпуклых фигур.

Советский математик Л. Г. Шнирельман, участвовавший в организации математического кружка при Московском университете, избрал одной из тем для занятий выпуклую геометрию. Эта тема была подхвачена Давидом Шклярским, который придал кружку форму, сохранившуюся до нашего времени. На базе многолетних занятий по выпуклой геометрии И.М. Яглом и В.Г. Болтянский, участники кружка Шклярского и продолжатели его дела, написали замечательную книгу «Простейшие выпуклые фигуры» [1].

Сегодня в системе «Задачи» (problems.ru) на базе МЦНМО [3], предназначенной для учителей и преподавателей, как помощь при подготовке уроков, кружков и факультативных занятий в школе, размещено около 200 задач на выпуклые и невыпуклые фигуры.

Приведем пример листика современного кружка для 9 класса.

1. На прямой дано n выпуклых фигур, любые две из которых имеют общую точку. Докажите, что и все фигуры имеют общую точку.

2. На плоскости даны 4 выпуклые фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что и все эти фигуры имеют общую точку.

3. (Теорема Хелли.) На плоскости дано n выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все фигуры имеют общую точку.

4. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.

5. На столе сидит несколько комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.

Большая подборка задач по данной теме, например, в пособии [6].

Различные определения выпуклых фигур и их эквивалентность

Определение. Фигура (множество точек) M называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя точками A и B, принадлежащими M, все точки отрезка, соединяющего A и B, принадлежат M.

Помимо основного определения для произвольной фигуры придумано много различных эквивалентных определений для многоугольников:

1. Многоугольник выпуклый, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

2. Многоугольник выпуклый, если все его внутренние углы меньше 180°.

3. Многоугольник выпуклый, если все точки его диагоналей принадлежат ему.

4. Если всякая прямая, проходящая через любую внутреннюю точку ограниченной фигуры, пересекает ее границу в двух точках, то фигура выпукла.

Доказательство эквивалентности этих утверждений само по себе увлекательное занятие на основе набора задач, последовательно решая которые, школьник учится доказывать эквивалентность утверждений. Например, такой набор (листик) предлагался учащимся 9 класса в образовательном центре «Сириус» С.Г. Волчёнковым [7]:

1. Докажите, что пересечение нескольких выпуклых фигур – выпуклая фигура.

2. Докажите, что если все вершины треугольника принадлежат выпуклой фигуре, то любая точка внутри треугольника также принадлежит фигуре.

3. Докажите, что выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости

относительно каждой прямой, содержащей его сторону.

4. Докажите, что если многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно каждой своей стороны, то он выпуклый.

5. Докажите, что в выпуклом многоугольнике все внутренние углы меньше 180°.

6. Докажите, что если все внутренние углы многоугольника M меньше 180°, то все точки его диагоналей принадлежат M.

7. Докажите, что если все точки диагоналей принадлежат многоугольнику, то он выпуклый.

Часть из этих утверждений доказывается как простые следствия основного определения, часть более сложная и требует более хитроумных конструкций. Рассмотрим, например, задачу 6.

Пусть все углы M меньше 180°. Рассмотрим один из углов ABC. Докажем, что диагональ AC принадлежит многоугольнику. Пусть это не так (от противного). Тогда есть точки границы многоугольника между B и AC. Выбираем самую дальнюю из них от AC (точку D). Проводим через неё прямую d, параллельную AC. Между d и точкой B других точек границы нет. Значит, D – вершина угла, большего 180°. Противоречие. Отрезаем треугольник ABC. Оставшийся многоугольник имеет углы меньше 180°. Дальше можно применить индукцию.

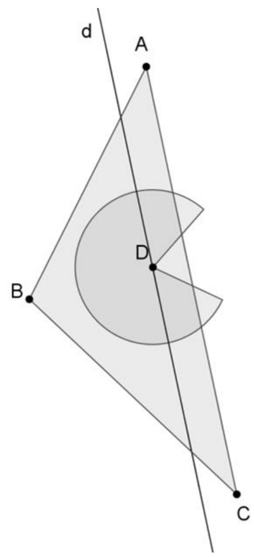

Рис.1

Подсчет углов многоугольника

Большое количество задач в школьной и олимпиадной геометрии связано с подсчетом углов. Например, в любом учебнике есть следующие теоремы:

1. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n – 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Рассмотрим несколько задач, связанных с этими теоремами.

1. Сколько острых углов может быть у выпуклого n-угольника?

В этой задаче очевидна оценка: может быть не более 3 острых углов из-за теоремы о сумме внешних углов. Но утверждение, что углов от 0 до 3 для больших n требует построения примера, а для n, равного 3, неверно, что для детей оказывается неожиданным фактом. Не существует треугольник с одним острым углом или вовсе без него…

2. Докажите лемму о внутренней диагонали: В любом n-угольнике ($n > 3$) существует диагональ, целиком лежащая в этом n-угольнике.

3. Чему равна сумма внутренних углов произвольного n-угольника?

4. Сколько острых углов может быть у произвольного 12-угольника?

5. Сколько острых углов у 12-угольника могут идти подряд?

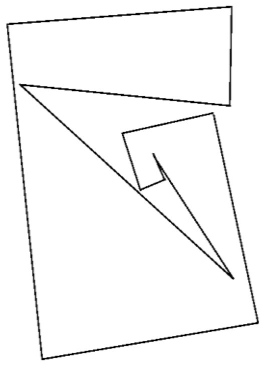

Рис.2

Решение. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180°(n – 2)$. Пусть в 12-угольнике k острых углов. Тогда $180°(12 – 2) \leq 90°k + 360°(12 – k)$, откуда $k \leq 9\frac{1}{3}$. Строим пример с 9 подряд идущими острыми углами.

Теорема Хелли

Теорема (Хелли, 1913). В пространстве R^d дано конечное семейство выпуклых множеств. Известно, что любые d +1 множеств пересекаются. Тогда все они пересекаются.

Рассмотрим случай $d = 1$ (т.е. множества на прямой). Если на прямой дано конечное семейство промежутков, причем любые два пересекаются, то и все они пересекаются. Пусть, для простоты, все наши промежутки – отрезки $[a_i; b_i]$, $i = 1, ..., n$. Среди всех левых концов a_i этих отрезков возьмем наибольший, пусть это будет a_k. Среди всех правых концов возьмем наименьший, пусть это будет b_m. Если $a_k \leq b_m$, то каждый из данных отрезков $[a_i; b_i]$ содержит отрезок $[a_k; b_m]$ (или точку в случае равенства), и все доказано. Ну а случай $a_k > b_m$ невозможен: тогда отрезки $[a_k; b_k]$ и $[a_m; b_m]$ не пересекаются.

На плоскости для определённых фигур можно ослабить условие теоремы. Например, на координатной плоскости даны несколько прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Докажем, что если любые два прямоугольника имеют общую точку, то и все прямоугольники имеют общую точку.

Для доказательства рассмотрим проекции прямоугольников на оси, для которых выполняется условие теоремы Хелли на прямой. То есть все проекции на каждую из осей имеют общую точку.

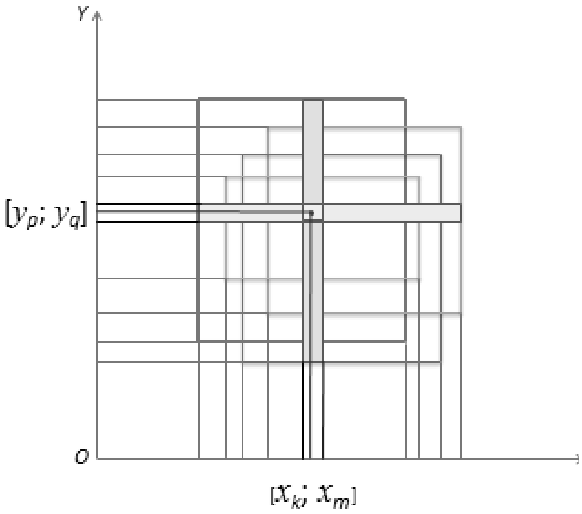

Рис.3

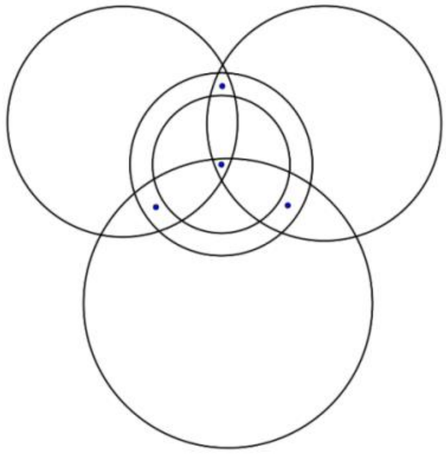

Рис.4

Пусть это будут точки x_1 (на общем отрезке [x_k; x_m]) и y_1 (на общем отрезке [y_p; y_q]) соответственно (рис.3). Докажем, что точка с координатами (x_1; y_1) принадлежит всем прямоугольникам. Рассмотрим некоторый из этих прямоугольников. В нём есть точка с абсциссой x_1 и есть точка с ординатой y_1. Но тогда есть и точка (x_1; y_1).

Для произвольных фигур теорема неверна. На рисунке 4 изображены три круга и невыпкулая фигура – кольцо. Нарушение выпуклости приводит к неверному результату. При нарушении условия в количестве пересекающихся фигур результат также становится неверным, как для произвольных выпуклых фигур (проекции даже могут иметь общие точки, но у фигур общей точки нет – рис.5), так и даже для квадратов (на рисунке 6 каждые два квадрата пересекаются, но никакие 3, а тем более 4 не имеют общих точек).

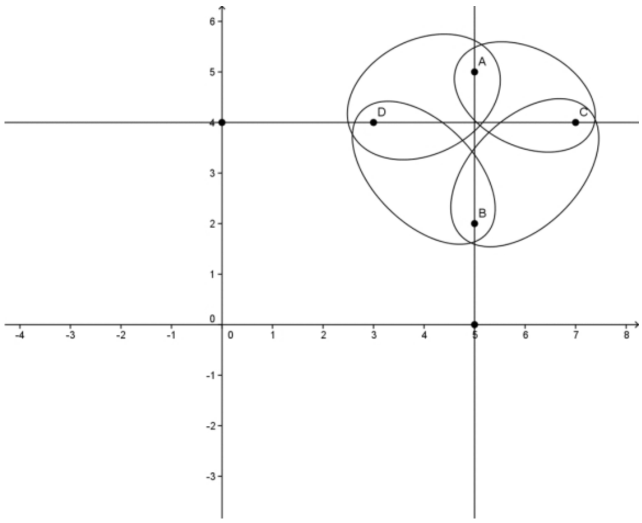

Рис.5

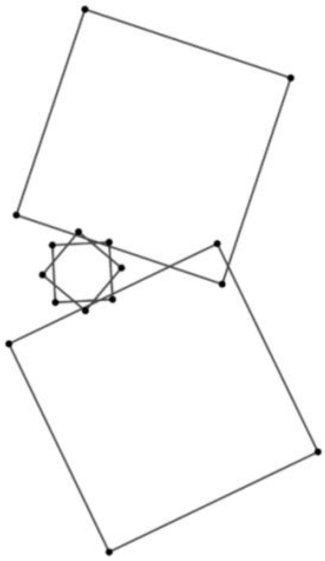

Рис.6

В случае $d = 2$ теорема Хелли утверждает, что если на плоскости дано конечное семейство выпуклых множеств, причем любые три пересекаются, тогда и все они пересекаются Полностью доказательство можно посмотреть в статье [4], отметим лишь основные идеи. На плоскости даны выпуклые множества $A_1, \ldots, A_n$, любые три из которых пересекаются. При $n = 3$ это очевидно. При $n \geq 4$ предположим обратное: они все не пересекаются.

Рассматриваем точки M_1, M_2, M_3 и M_4, принадлежащие всем множествам кроме A_1, A_2, A_3, A_4, соответственно. Если эти точки являются вершинами выпуклого четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$, то возьмем точку пересечения его диагоналей M_1M_3 и M_2M_4 и обозначим ее через M. Точки M_1 и M_3 принадлежат множествам A_k, кроме A_1, A_3, а значит (в силу выпуклости!), и весь отрезок M_1M_3 лежит в этих множествах, поэтому $M \in A_k$, включая A_2, A_4. Так же рассматриваем и вторую диагональ M_2M_4, и получаем, что $M \in A_k$ для всех k, отличных от 2 и 4, включая A_1, A_3. Итак, точка M принадлежит всем множествам $A_1, \ldots, A_n$.

Если же точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, то одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех других. Пусть точка M_4 принадлежит треугольнику $M_1M_2M_3$. Множество A_4 содержит все три вершины M_1, M_2, M_3, а значит, содержит весь треугольник (вновь пользуемся выпуклостью). Следовательно, $M_4 \in A_4$. Но, с другой стороны, по определению

$M_4 \in A_k$ при всех $k \neq 4$. Потому M_4 – общая точка всех множеств $A_1, \ldots, A_n$.

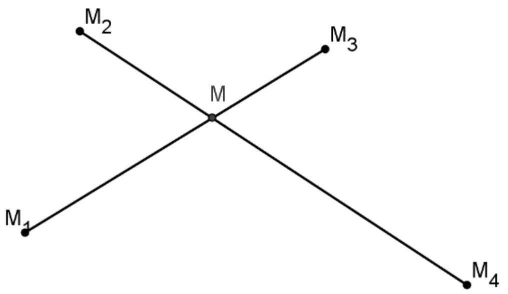

Рис.7

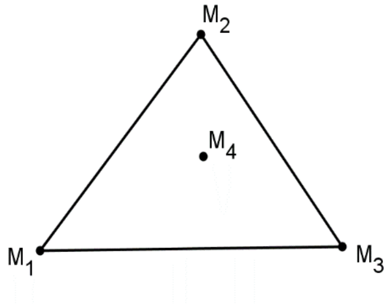

Рис.8

Эта теорема верна и для бесконечного семейства выпуклых множеств. Правда, с одним дополнительным условием: все множества должны быть не только выпуклы, но еще и ограничены и замкнуты.

Например, в семействе лучей $A_k = [k; +\infty)$, $k \in \mathrm{N}$, на прямой R^1 все множества выпуклы и замкнуты, и любые два пересекаются, но все они не имеют общей точки. Здесь не выполнено условие ограниченности. А если не выполнено условие замкнутости, контрпример дает семейство интервалов $A_k = \left(0; \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathrm{N}$. На плоскости можно рассмотреть семейство полуплоскостей с параллельными границами.

Задачи с графами

Рассмотрим ещё несколько задач, в которых помимо выпуклости пригодится умение строить примеры и некоторые знания свойств графов.

1. Существуют ли два n-угольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны? Если да, укажите наименьшее n, при котором это возможно.

Решение. Очевидно, что многоугольники (если они существуют) должны быть невыпуклыми. При $n \leq 4$ такое невозможно, так как рёбер в полном графе 0, 1, 3 и 6 соответственно, что меньше $2n$. При $n = 5$ в полном графе 10 рёбер. Пример – на рисунке (пятиугольники $ABCDE$ и $ACEBD$).

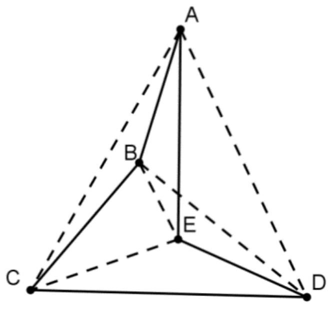

Рис.9

2. На плоскости расположены 5 кругов. Каждые два имеют хотя бы одну общую внутреннюю точку. Верно ли, что какие-то три имеют общую точку?

<u>Решение.</u> Верно. Рассмотрим отрезки, соединяющие центры кругов. Получим полный граф на 5 вершинах (K_5). Как известно, он не планарный, то есть при любом расположении кругов есть два пересекающихся отрезка, соединяющих центры. Рассмотрим их. Пусть это отрезки O_1O_2 и O_3O_4, а их пересечение – точка X. Она принадлежит одной из окружностей с центрами O_1, O_2 (пусть будет с центром O_1) и одной из окружностей с центрами O_3, O_4 (пусть будет с центром O_3). Рассмотрим пересечение кругов с центрами O_1 и O_3 (линзу) и точку Y на границе линзы – пересечение окружности с центром O_1 с отрезком O_1O_2 или окружности с центром O_3 с отрезком O_3O_4 (один из этих случаев должен выполняться, иначе точка X не принадлежит линзе). Пусть Y – пересечение окружности с центром O_1 и отрезка O_1O_2. Тогда точка Y принадлежит кругу с центром O_2 (иначе круги с центрами O_1 и O_2 не пересекаются) и на отрезке XY найдется внутренняя точка круга с центром O_2. Эта точка является внутренней точкой трёх кругов.

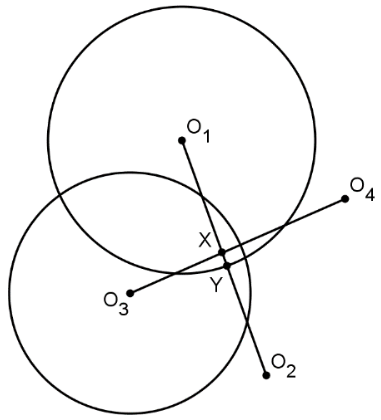

Рис.10

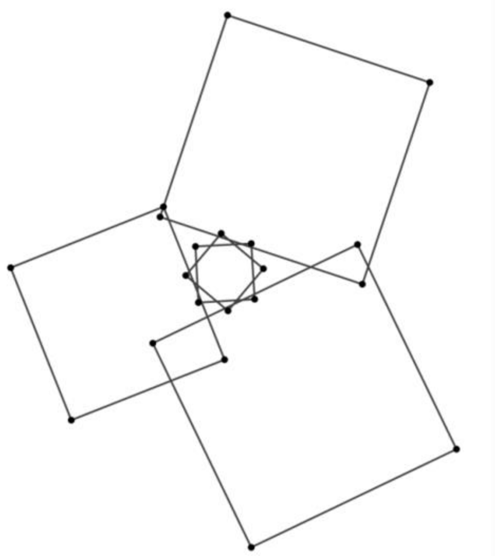
Рис.11

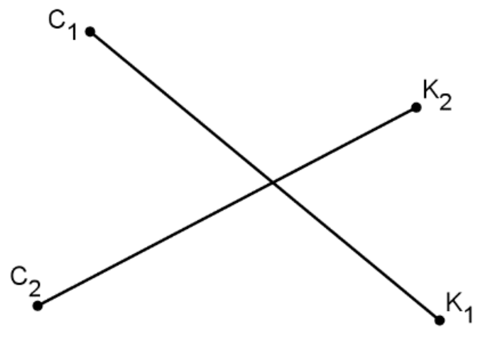

Рис.12

3. На плоскости расположены 5 квадратов. Каждые два имеют хотя бы одну общую внутреннюю точку. Верно ли, что какие-то три имеют общую точку?

Решение. Нет, неверно. Пример на рисунке 11.

4. На плоскости расположено 3 красных и 3 синих круга, причём, каждые два разноцветных круга имеют общую точку. Верно ли, что найдутся два одноцветных круга, имеющих общую точку?

Решение. Верно. Рассмотрим отрезки, соединяющие центры разноцветных кругов (рис.12). Они образуют граф $K_{3,3}$, не являющийся планарным. Значит, какие-то два из проведённых отрезков пересекаются. Назовём эти отрезки K_1C_1 и K_2C_2 (K_1 и K_2 – центры красных кругов с радиусами R_1 и R_2, C_1 и C_2 – центры синих кругов с радиусами R_3 и R_4). Тогда $K_1C_1 \leq R_1 + R_3$, $K_2C_2 \leq R_2 + R_4$ (так как разноцветные круги пересекаются). Отсюда $K_1C_1 + K_2C_2 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Допустим, что одноцветные круги не пересекаются. Тогда $K_1K_2 > R_1 + R_2$, $C_1C_2 > R_3 + R_4$, откуда следует, что $K_1K_2 + C_1C_2 > R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Получаем, что $K_1K_2 + C_1C_2 > K_1C_1 + K_2C_2$, что противоречит неравенству треугольника.

5. На плоскости расположено 3 красных и 3 синих квадрата, причём, каждые два разноцветных квадрата имеют общую точку. Верно ли, что найдутся два одноцветных квадрата, имеющих общую точку?

Решение. Нет, неверно. Пример на рисунке 13 (Одноцветные квадраты имеют параллельные стороны).

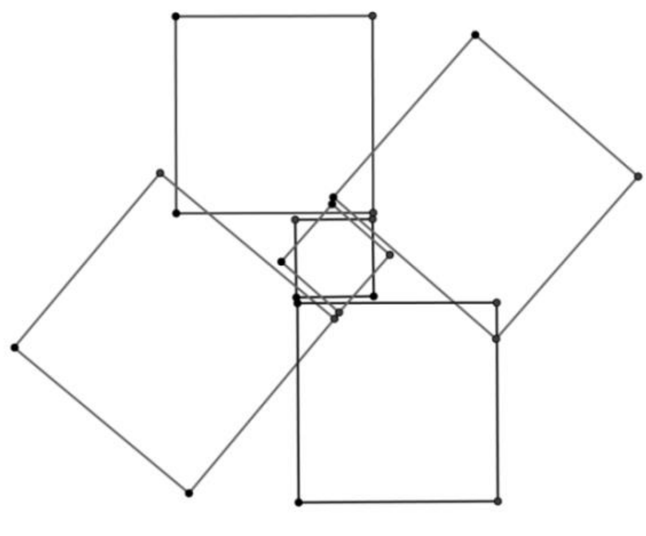

Рис.13

В заключении скажем, что задачи с выпуклыми фигурами являются благодатной почвой для формирования качеств мышления, характерных для математической деятельности, формирования представлений о методах математики.

Решения этих задач открывают двери в мир большой математики. При этом заметим, что возрастной диапазон учащихся колеблется от младших до старших.

Литература:

1. Болтянский, В.Г. Выпуклые фигуры [Текст] / В.Г. Болтянский, И.М. Яглом // Библиотека математического кружка. Вып. 4. – М.-Л.: ГТТИ, 1951. – 343 с.

2. Прасолов, В.В. Задачи по планиметрии [Текст] / В.В. Прасолов. 5-е изд., М.: МЦНМО, 2006. – 640 с.

3. Интернет-проект «Задачи» [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.problems.ru (21 февраля 2019).

4. Протасов, В.Ю. Теорема Хелли и вокруг неё [Текст] / В.Ю. Протасов // Квант: журнал. – 2009. – № 3. – С. 9.

5. Тихомиров, В.М. Геометрия выпуклости [Текст] / В.М. Тихомиров // Квант: журнал. – 2003. – № 4. – С. 6-7.

6. Смирнов, В.А. Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи [Текст] / В.А. Смирнов, И.М. Смирнова // Учеб. Пособие для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2004.

7. Математический образовательный портал / Режим доступа: http://math.edu.yar.ru (21 февраля 2019).